論　文

データサイエンスを志向した条件付き確率の学習指導に関する一考察
－ ベイズ推測に着目して －

塩　澤　友　樹
岐阜聖徳学園大学教育学部

A study of teaching conditional probability in high school mathematics by looking to data science:
Focusing on Bayesian inference

Yuki SHIOZAWA

Abstract

The purpose of this study is to show the importance of Bayesian inference, and also explain the points to note when teaching Bayesian inference, as high school mathematics in Japan aims at students' understanding of data science, especially through conditional probability. For this purpose, this study has made clear the position of conditional probability in the Japanese curriculum. It analyzed two teaching materials that include the advantages of the Bayesian inference. The analysis makes the following observations.

(1) In the Bayesian inference, students should have the opportunity to think of the Bayesian theorem as a relational expression of "prior probability", "fractional expression including likelihood", and "posterior probability".
(2) Teachers should be very careful to understand that the Bayesian inference requires a unique view and concept of "considering the obtained posterior probability as the prior probability".
(3) Including the Bayesian inference in teaching conditional probability encourages the understanding of data science, leading to better utilization of information.

Key Words : Data science, conditional probability, Bayesian inference, cooperation with information

Ⅰ．はじめに －研究の背景と目的、方法－

広辞苑では、データサイエンスとは「統計学・計算機科学・情報科学などを応用し、各種のデータが持つ意味・法則性を探り出し、また、その分析手法を研究する学問分野」（新村，2018）[1] と定義される。滋賀大学で日本初のデータサイエンス学部を先導する竹村は、データサイエンスの定義が曖昧でバズワードとして使われている現状を指摘しつつ（竹村，2018，p. 4）[2] 、その構成領域としてデータエンジニアリング（情報学）、データ分析（統計学）、データからの価値の創造（価値創造）の３つを挙げた(Takemura, 2018，p. 114)[3] 。また、一般財団法人データサイエンティスト協会では、データサイエンティストに求められるスキルセット（図１）として、データエンジニアリング力、データサイエンス力、ビジネス力の３つを掲げた。そして、データサイエンス力を「情報処理、人工知能、統計学などの情報科学系の知恵を理解し、使う力」と定義した（データサイエンティスト協会，2014）[4] 。そのため、データサイエンスの定義はいまだ確定的でないものの、統計学をより広く情報学を含めたデータサイエンスとして捉える重要性が窺い知れる。

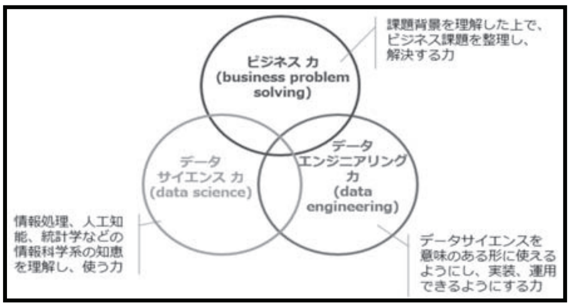


図１　スキルセット（データサイエンティスト協会，2014，p. 2）

一方、内閣府では人工知能（AI）やビッグデータが社会生活で活用される未来に向けSociety5.0として、日本の目指すべき姿を示した（内閣府，2018）[5)]。平成30年６月には、Society5.0に向けた人材育成に係る大臣懇談会の報告書がまとめられ、「情報活用能力の習得」の中で小中高を通じたデータサイエンスや統計教育の充実が指摘された（文部科学省，2018，p.19）[6)]。このような動向を鑑みると、学校数学の中でも情報科との連携を模索しながらデータサイエンスに関わる内容を取り入れていくことは緊喫の課題であるといえる。そこで、本研究で着目するのが条件付き確率である。

平成30年告示高等学校学習指導要領解説数学編理数編[7)]及び情報編[8)]では、「数学Ａ」場合の数と確率、「情報Ⅱ」情報とデータサイエンスに条件付き確率に関わる説明が記載された。ベイズの定理は、頻度確率に基づく標本理論に対し、主観確率に基づくベイズ統計学の基盤となる定理である。特に、ベイズの定理を一貫して用いるベイズ推測では「事前確率」に「尤度を含む分数式」を乗じて「事後確率」を求める。そして、この操作を繰り返し確率を更新するため、機械学習の考え方の素地を学ぶ機会になり得る。そのため、数学科と情報科の両方で条件付き確率を扱い、ベイズ推測に関連付ける意義は大きい。

したがって、本稿では、データサイエンスを志向した高等学校数学科における条件付き確率の学習指導に向けて、ベイズ推測に着目し、ベイズ推測の学習指導上の留意点とその意義を示すことを目的とする。なお、この目的を達成するために、以下のように議論を進める。まず、数学教育における先行研究や学習指導要領上の変遷を踏まえ、学校数学における条件付き確率の位置づけについて整理する。次に、ベイズ推測の利点を踏まえた教材の要件を導出し、その要件を反映した教材の概要を述べる。最後に、例示教材で想定される生徒の解答例を分析し、ベイズ推測の学習指導上の留意点とその意義を述べる。

Ⅱ．学校数学における条件付き確率の位置づけ

１．条件付き確率の理解の困難性と学習指導要領上の位置づけの変遷

条件付き確率は、心理学の対象として人間の直観的判断とともに議論されてきた。例えばKahneman(2014)[9)]では、直感的判断を下す「システム１」と合理的判断を下す「システム２」の２つを用いて人間の確率判断について分析し、一連の研究の中で、条件付き確率に基づく判断について扱った。そして、多くの人は条件付き確率の問題場面において、統計的基準率（事前確率）を無視し、「システム１」に基づき判断する傾向があることを指摘した。また、数学教育の先行研究においても、時間軸の影響といった観点から条件付き確率の理解の困難性は指摘されており（Fishbein&Schnarch，1997等）[10)]、例えば、山本（1994）[11)]では、条件付き確率の理解の改善に向けて図式表現（カルノー図）を用いた指導の重要性を指摘している。

先行研究においてこのような困難性が指摘される中、「条件付き確率（条件つき確率）」という用語が学習指導要領上に登場したのは昭和45年告示高等学校学習指導要領からである。この学習指導要領から集合の考えが導入され、「数学Ｉ」内容として条件付き確率が位置づけられた。過去の学習指導要領上の位置づけをまとめたものが表１である（国立教育政策研究所，2014）[12)]。表１を概観すると、条件付き確率は必履修科目である「数学Ｉ」に導入されたものの、それ以降は選択科目に位置付けられた。平成21年告示学習指導要領において「数学Ａ」に位置付けられるまで、「数学Ｂ」や「数学Ｃ」で扱われることもあったが、これらの科目では大学入試の関係で統計内容が選択されることは少なかった。そのため、条件付き確率も学校の授業で扱われる機会は少なかったことが推察される。

表１　高等学校数学科における学習指導要領上の「条件付き確率」の位置づけの変遷

	昭和45年告示	昭和53年告示	平成元年告示	平成11年告示	平成21年告示
科目	「数学Ｉ」	「確率・統計」	「数学B」	「数学C」	「数学A」
項目・内容	(1) 確率 ア 確率の意味とその基本的な法則 イ 条件つき確率 事象の独立	(3) 確率 ア 確率とその基本的な法則 イ 独立な試行と確率 ウ 条件つき確率	(2) 確率分布 ア 確率の計算 イ 確率分布 （ア）確率変数と確率分布 （イ）二項分布 ［用語・記号］ 条件つき確率	(2) 確率分布 ア 確率の計算 イ 確率分布 （ア）確率変数と確率分布 （イ）二項分布 ［用語・記号］ 条件つき確率	(1) 場合の数と確率 イ 確率 （ア）確率とその基本的な法則 （イ）独立な試行と確率 （ウ）条件付き確率

２．平成30年告示高等学校学習指導要領における条件付き確率の位置づけ

条件付き確率は、平成21年告示高等学校学習指導要領では「数学Ａ」に位置づけられていた。そして、その扱いは、集合の考えを用いて「条件付き確率の公式」を導入する。そして、乗法定理の形に直し、独立でない試行の確率を求める程度であった。そのため、ベイズの定理を利用して事前確率から事後確率を求める等、ベイズ推測に関する内容は扱われてこなかった。

(1)　$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$　［条件付き確率の公式］

(2)　$\mathrm{P}(A \cap B) = P(A) \times P_A(\mathrm{B})$　［乗法定理］

(3)　$P_A(B) = \dfrac{P_B(A) \times P(B)}{P(A)}$　［ベイズの定理］

図２　条件付き確率で用いる３つの式

しかし、平成30年告示高等学校学習指導要領解説数学編理数編（以下、新解説数学編）では、条件付き確率は従前同様に「数学Ａ」に位置づけられ、ベイズの定理の式の記載はないものの、初めてカルノー図を用いて「P(A∩B)=P(A)　PA(B)=P(B)$\mathrm{P_B}$(A)」という積の形が示された。そして、ベイズ統計に関する説明も次のように加えられた。

…（略）、次のようなベイズ統計の基本的な考え方を知った上で指導に当たることも、生徒の確率の意味の理解を深めるために有用であると考える。まず、データを観測する前に関心のある事象に主観確率（事前確率）を与え、関心のある事象が生じた下での観測データが出現する客観的条件付き確率（標本確率）を求めて乗法定理に基づき掛け算をする。それを用いて、関心のある事象のデータ観測という条件付き主観確率（事後確率）を推定する。これがベイズ統計の基になる考え方である。（新解説数学編，p. 95）

一方、平成30年告示学習指導要領解説情報編（以下、新解説情報編）では「情報Ⅱ」情報とデータサイエンスにおいて、データ処理に関する分類の方法の１つとして、条件付き確率が記載された。そして、次のように説明が加えられた。

ここでは、数学科における学習内容と関連する部分も含むが、数学や統計学の専門的な内容に深入りすることなく、可視化やソフトウェアによる処理の結果を基に、その概念を理解するようにする。（新解説情報編，p. 51）

以上を踏まえると、条件付き確率は平成21年告示学習指導要領から多くの生徒が履修する「数学Ａ」に位置付けられ、新解説数学編では、指導に当たる教師に向けてベイズ推測の説明が加えられた。そして、新解説情報編では、可視化やソフトウェアによる処理を通して、条件付き確率を扱うことになる。確かに新解説数学編では、条件付き確率の扱いについて、「事象の構造が分かりやすい簡単な場合について、条件付き確率を求めることができるようにする（p. 94）」とある。しかし、「情報Ⅱ」において、データの分類方法の１つとして条件付き確率が紹介されたことを考慮すると、ベイズ推測は数学科と情報科の両科目で連携して扱うことが可能なデータサイエンス内容といえる。したがって、「数学Ａ」条件付き確率においてベイズ推測を扱うことで、データサイエンスを志向した学習指導につながることが期待できる。

Ⅲ．ベイズ推測の利点を踏まえた教材の概要

１．ベイズ推測の利点

ベイズ統計学の専門書は数多く出版されているが、渡辺（1999）[13] では様々な立場があることを認めた上で、一般論としてのベイズ推測の利点として次の９つを挙げている。

表２　渡辺(1999)p. 19 におけるベイズ推測の利点

ア)	どのような状況下でもベイズの定理を用いるという原理は一貫している	(単純性)
イ)	モデルさえ与えられれば、ベイズ推測ではデータを含むすべての情報を自動的に活用することになる	(有用性、単純性)
ウ)	データ以外の知識や情報を活用できる	(実用性)
エ)	ばく然とした事前分布を利用することもできる	(実用性)
オ)	未知量について直接確率計算ができる	
カ)	データや情報の蓄積を自然に容易に活用することができる	(有用性、単純性)
キ)	かく乱母数の処理が容易である	
ク)	母数について制約があっても問題を生じにくい	
ケ)	ベイズ推測は擬でない事前分布のもとでは常に許容される	［下線及び( )内は筆者］

渡辺（1999）を踏まえると、９つの利点は次のように解釈できる。なお、渡辺（1999）では、確率分布を扱うため「事前分布」「事後分布」という言葉を用いるが、本稿では高等学校数学科における条件付き確率に着目するため、これらを「事前確率」「事後確率」として用いる。

まずア）について、ベイズ推測で確率を求める際、図２(3)の式を図３の形に変形し、「事前確率１」に「尤度[14]を含む分数式」を乗じて「事後確率１」を求める。そして、この確率を新たな「事前確率２」とみなし、前の操作を繰り返す。そのため、ベイズ推測の原理は明快・単純であり、ベイズの定理を一貫して用いる単純さを述べている。次にイ）については、ベイズの定理では、式の形から事象Ａや事象Ｂ以外の不要な情報をはじき出し、必要な情報を活用できることを述べている。ウ）エ）については、事前確率にデータ以外の知識や経験といった事前情報を活用する、あるいは事前情報がほとんどない設定の下でも分析可能なことを述べている。カ）については、ア）に関連し、あるデータに基づき「事後確率１」を得たならば、次に新たなデータを得た際、「事後確率１」を「事前確率２」とみなし、直ちに「事後確率２」を得られる。この活用時の自然さや容易さを述べている。そして、カ）を除く残り４つは主に標本理論とベイズ統計学を比較した際に出てくる利点について述べている[15]。したがって、これらは重複する点もあるが、特にア）～エ）及びカ）よりベイズ推測の利点を踏まえた教材の要件として、次の３つが得られる。

$$\underbrace{P_A(B)}_{\text{「事後確率」}} = \overbrace{\frac{P_B(A)}{P(A)}}^{\text{「尤度を含む分数式」}} \times \overbrace{P(B)}^{\text{「事前確率」}}$$

図３　「事前確率」と「事後確率」の関係式

① 尤度を用いて確率を更新する確率更新（ベイズ更新）の有用性を生徒が実感できること：「有用性」
② ベイズの定理を繰り返し用いるベイズ推測の原理の単純性を生徒が実感できること：「単純性」
③ 事前情報に応じて事前確率を設定し、分析を進めることができるベイズ推測の実用性を生徒が実感できること：「実用性」

なお、①は主にイ）カ）に関連し、図３の式で「事前確率」に「尤度を含む分数式」を乗じて確率を更新する利点を反映している。②は主にア）イ）カ）に関連し、ベイズ推測の際にベイズの定理を一貫して用いる利点を反映している。③は主にウ）エ）に関連し、分析の際の事前情報に応じて事前確率を設定し、分析を進めることができる利点を反映している。

２．ベイズ推測の利点を踏まえた教材の概要

ベイズ推測では、その基本的な考え方として「理由不十分の原則（原理）[16]」がある。「理由不十分の原則」は事前確率に関わる考え方であり、その設定には様々な方法がある（渡辺，1999，p. 77）。そのため、必ずしもこの原則が適切とはいえない。しかし、この原則では理由不十分であっても漠然とした事前確率を前提とおくため、ベイズ更新のよさを実感しやすい。一方、ベイズ推測の代表的な例として「ベイズフィルター」がある。「ベイズフィルター」は、「情報Ⅱ」内容に関わるデータの分類方法の１つであり、迷惑メールの仕組みに利用されている。また、新たなデータを得て確率を更新するため、本題材もベイズ更新のよさを実感しやすい。以下では、これら２つを紹介している涌井（2013）[17]を参考に、「数学Ａ」での授業を見据えベイズ推測の利点を踏まえた教材の概要を示す。

（１）　教材１の概要

〔課題〕「赤玉はどちらの袋？」
２つの袋㋐、㋑がある。㋐の袋には赤玉２個、白玉１個、㋑の袋には赤玉１個、白玉２個が入っている。いま、２つの袋の内、どちらかの袋を選ぶ。その後は、その選んだ袋から玉を１個取りだす操作を繰り返す。このとき、次の確率を考えよ。なお、１回毎に取り出した玉は元に戻すものとする。
(1)　この操作を１回行う。赤玉が出たとき、この赤玉が袋㋐の玉である確率は？
(2)　(1)で赤玉が出た後、もう１回同じ操作を行う。２回目も赤玉が出たとき、この赤玉が袋㋐の玉である確率は？
(3)　確率の求め方を比べ、分かることを述べよ。

図４　教材１における課題

本教材は「理由不十分の原則」を題材に、ベイズ推測の利点の内「有用性」「単純性」を実感させることをねらいとした。直観的には袋㋐の方が赤玉が多いため、(2)の確率が(1)に比べ高くなることを納得しやすい。また、(2)で(1)の事後確率を新たな事前確率とみなし、ベイズの定理を繰り返し用いるため「単純性」を実感できる。具体的には、次のように解答することを想定した。

(1) 「袋㋐から玉を取り出す」事象をA_1、「袋㋑から玉を取り出す」事象をB_1とし、「赤玉を取り出す」事象を R とする。

	A_1	B_1
R	$A_1 \cap R$	$B_1 \cap R$
$\overline{R}$	$A_1 \cap \overline{R}$	$B_1 \cap \overline{R}$

袋㋐、㋑を選ぶ確率（事前確率）を等確率とすると　$P(A_1)=1/2$、$P(B_1)=1/2$

条件より$P_{A_1}(R) = 2/3$、$P_{B_1}(R) = 1/3$であるから

$$P_R(A_1) = \frac{P(A_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P_{A_1}(R) \times P(A_1)}{P(A_1 \cap R) + P(B_1 \cap R)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

よって、求める確率（事後確率）は 2/3 である。

(2)　2 回目に玉を取り出すとき、「袋㋐から玉を取り出す」事象をA_2、「袋㋑から玉を取り出す」事象をB_2とする。(1)の事後確率を事前確率とみなすと、取り出す玉の袋が㋐、㋑である確率はそれぞれ次のようになる。　　　$P(A_2)=2/3$、$P(B_2)=1/3$

条件より$P_{A_2}(R) = 2/3$、$P_{B_2}(R) = 1/3$であるから

$$P_R(A_2) = \frac{P(A_2 \cap R)}{P(R)} = \frac{P_{A_2}(R) \times P(A_2)}{P(A_2 \cap R) + P(B_2 \cap R)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{4}{5}$$

よって、求める確率（事後確率）は 4/5 である。

(3)　(1)では、問題文に条件がないため、各袋を選ぶ事前確率を等確率として事後確率を求めたが、(2)では、(1)により更新した事前確率を用いて事後確率を求めた。

図５　教材１で想定した生徒の解答例

したがって、教材１では、生徒はカルノー図を用いて簡単な事象の構造を把握し、ベイズの定理を繰り返し用いる中で「単純性」を実感する。そして、(1)と(2)の求め方を比べることで、尤度を用いて確率を更新する「ベイズ更新」のよさ（「有用性」）を知ることになる。

〔課題〕**「迷惑メールの判定」**

迷惑メールか通常メールかを調べるために 3 つの単語「キャンペーン」、「無料」、「大募集」に着目する。これらは、迷惑メールと通常メールの中に、それぞれ右表の確率で含まれていることが調べられている。

検出語	迷惑メール	通常メール
キャンペーン	0.4	0.3
無料	0.7	0.2
大募集	0.8	0.1

次の順で単語が検索されたとき、このメールを迷惑メール、通常メールのどちらに分類したほうがよいか調べよ。ただし、インターネットの中で、迷惑メールと通常メールの比率は６：４とする。

(1)「キャンペーン」という単語が検索されたとき、このメールが迷惑メールである確率を求めよ。

(2)「キャンペーン」という単語が検索されたとき、このメールが通常メールである確率を求めよ。

(3)「キャンペーン」、「無料」、「大募集」という単語が順番に検索されたとき、このメールは迷惑メールと通常メールのどちらに分類したらよいか調べよ。

(4)　太郎さんは迷惑メールと通常メールの比率（下線部）が分からなかったため、その比率を１：１と考えた。(3)と同様に判定するとき、迷惑メールと通常メールのどちらに分類したらよいか。太郎さんの考えで調べよ。

図６　教材２における課題

（２）教材２の概要

本教材は、「ベイズフィルター」を題材に、ベイズ推測の「有用性」「単純性」に留まらず「実用性」までを実感させることをねらいとした。迷惑メールである確率は、発見される迷惑メール特有の検索語が増える毎に上がっていくため、ベイズ推測の「有用性」が分かりやすい。また、(3)では、教材１同様に「単純性」も実感できる。さらに(4)では、太郎さんは迷惑メールと通常メールに関する事前確率が分からないため、「理由不十分の原則」を用いて事前確率を0.5と仮定する。そのため、(3)と(4)の比較により、生徒は初期の事前確率が漠然としても分析可能なベイズ推測の「実用性」を実感できる。具体的には、次のように解答することを想定した。

(1) 「キャンペーン」が検索される事象を A、迷惑メールである事象を F_1、通常メールである事象を T_1 とする。「キャンペーン」が検索されたとき、迷惑メールである確率は

条件より $P(F_1)$=0.6、$P(T_1)$=0.4 とするから

$$P_A(F_1)=\frac{P(A\cap F_1)}{P(A)}=\frac{P_{F_1}(A)\times P(F_1)}{P(A\cap F_1)+P(A\cap T_1)}=\frac{0.4\times 0.6}{0.4\times 0.6+0.3\times 0.4}≒0.67$$

(2) 「キャンペーン」が検索されたとき、通常メールである確率は　$P_A(T_1)=1-P_A(F_1)=0.33$

(3) 「無料」が検索される事象を B、「大募集」が検索される事象を C とする。

「キャンペーン」の次に「無料」が検索されたとき、迷惑メールである事象を F_2、通常メールである事象を T_2 とし、(1)(2)の事前確率を事後確率とみなすと　P(F_2)=0.67、P(T_2)=0.33

よって　$$P_B(F_2)=\frac{P(B\cap F_2)}{P(B)}=\frac{P_{F_2}(B)\times P(F_2)}{P(B\cap F_2)+P(B\cap T_2)}=\frac{0.7\times 0.67}{0.7\times 0.67+0.2\times 0.33}≒0.88$$

$$P_B(T_2)=1-0.88=0.12$$

同様に、「無料」の次に「大募集」が検索されたとき、迷惑メールである事象を F_3、通常メールである事象を T_3 とすると　$P(F_3)$=0.88、$P(T_3)$=0.12

よって　$$P_C(F_3)=\frac{P(C\cap F_3)}{P(C)}=\frac{P_{F_3}(C)\times P(F_3)}{P(C\cap F_3)+P(C\cap T_3)}=\frac{0.8\times 0.88}{0.8\times 0.88+0.1\times 0.12}≒0.98$$

以上より、迷惑メールの確率が 0.98 であるため、「迷惑メール」に分類した方がよい。

(4)　(1)で $P(F_1)$=0.5、$P(T_1)$=0.5 とし再計算すると

$$P_A(F_1)≒0.57、P_A(T_1)≒0.43$$

同様にして　$P_B(F_2)≒0.82、P_B(T_2)≒0.18$

したがって　$$P_C(F_3)=\frac{P_{F_3}(C)\times P(F_3)}{P(C\cap F_3)+P(C\cap T_3)}≒0.97$$

迷惑メールである確率が 0.97 であるため、太郎さんの考えでも「迷惑メール」に分類した方がよい。

図７　教材２で想定した生徒の解答例

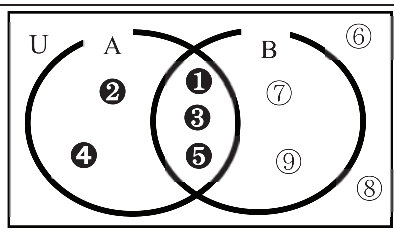
したがって、教材２では、生徒は問題を解き進めながら確率が更新されていく様子を実感できるものの、やや複雑な計算を要する。そのため、電卓等の計算機器を用いることが想定できる。また、「実用性」を考慮した(3)と(4)の比較では、生徒は「初めの事前確率を漠然と設定しても、確率の更新を繰り返せば判定基準となる事後確率が求まる」ことを実感できる。言い換えれば、事前情報の活用に依らず、多数のデータを入手すれば、信頼性の高い事後確率が求まるベイズ推測の「実用性」のよさを経験的に学ぶことができる[18]。

Ⅳ．考察

１．　平成 30 年告示高等学校学習指導要領の動向を踏まえたベイズ推測の学習指導

新解説数学編では、条件付き確率について、カルノー図やベイズ統計（ベイズ推測）の説明が新たに加えられた。実際、平成21年告示高等学校学習指導要領に基づく現行教科書でも、多くは下のように集合の考えを用いて、図２(1)の式を導入している。

赤玉５個に１、２、３、４、５、白玉４個に６、７、８、９とつけた９個の玉が入っている箱から１個取り出すという試行で、赤玉が出る事象を A、奇数番号が出る事象を B とする。ここで、取り出した玉が赤玉であることが分かっているとき、それが奇数番号の玉である確率 p は次のように考えられる。（高橋陽一郎他 29 名(2016)，p. 59）[19]



【説明例】（以下，筆者作成）

$$\mathrm{p}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}\left(=\frac{3}{5}\right)\cdots①$$

A が起こったことが分かったとき、B が起こる確率を$P_A(B)$とする。

$\mathrm{P(A)}=\dfrac{n(A)}{n(U)}$、$\mathrm{P(A\cap B)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(U)}$だから、①の右辺の分母・分子を$n(U)$で割ると $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

図８ 平成 21 年告示高等学校学習指導要領に基づく教科書における条件付き確率の導入例

そして、その後、くじ引き等の非復元抽出の問題で図２(2)の式を導入し、利用の問題に入る。そのため、条件付き確率の式と乗法定理の式は扱われるものの、それらから導出されるベイズの定理の式は扱ってはいない。加えて、ベイズ推測の問題も見当たらない。

このような現行教科書での扱いを踏まえると、「数学Ａ」の授業で新たにベイズ推測を扱う上で、次の２つが示唆される。１つ目は「ベイズの定理の式」についてである。例示した２つの教材から示唆されるように、ベイズ推測では、「事前確率」に「尤度を含む分数式」を乗じて「事後確率」を求める。この操作を繰り返し、確率を更新する。そのため、ベイズ更新の意味を理解するためには、図３の関係式の形でベイズの定理を解釈する必要がある。しかし、図５や図７の解答例から示唆されるように、単に事後確率を求める場合、必ずしも図３の式がその解決過程の中に現れるとは限らない。また、新解説数学編でも図３の式の記載はないことを考慮すると、ベイズの定理の式を「事前確率」・「尤度を含む分数式」・「事後確率」の関係式として解釈する場面を意図的に設ける必要がある。

次に、２つ目は「求めた事後確率を事前確率とみなす」ことについてである。図５や図７の解答例から窺えるように、ベイズ推測では、ベイズ更新を繰り返す際、求めた事後確率を事前確率とみなし、新たな事後確率を求める。しかし、従来の確率の授業では、「求めた事後確率を事前確率とみなす」といった見方・考え方は扱ってきていない。そのため、実際にベイズ推測を授業で扱う場合には、この特有の見方・考え方に留意して指導する必要がある。

以上を踏まえると、ベイズ推測の学習指導上の留意点として、次の２つの示唆が得られる。

・ベイズ推測では、ベイズの定理の式を「事前確率」・「尤度を含む分数式」・「事後確率」の関係式として解釈する場面を設ける

・ベイズ推測には「求めた事後確率を事前確率とみなす」という特有の見方・考え方があり、特に留意して指導する

２．データサイエンスとベイズ推測の学習指導

教材１では、新解説数学編での指摘を踏まえ、事象の構造が簡単に捉えられるように、玉を取り出すといった単純な場面で「理由不十分の原則」を用いてベイズ更新を行う場面とした。また、教材２では、初期条件で与えた事前確率に基づき迷惑メールである確率を求めさせた後、(4)で再度「理由不十分の原則」を用いて迷惑メールである確率を求める場面とした。そのため、教材２は教材１を包括し、さらにベイズ推測の「実用性」までを考慮した教材であった。具体的には、(4)で迷惑メールと通常メールに関する事前確率が分からないため、「理由不十分の原則」により0.5（等確率）と仮定する。そして、(3)までの計算を繰り返すと、迷惑メールである確率は0.98から0.97へと下がるものの、高い確率で迷惑メールと判定できる。これこそ、積極的に事前情報を活用したり、漠然とした事前確率を許容したとしても、分析を進めることができるベイズ推測の「実用性」のよさであり、ベイズ推測で求めた確率が主観確率と呼ばれる所以でもある[20]。

一方、データサイエンスの視座から教材２を検討すると、教材２では得られたデータに基づく尤度（尤度を含む分数式）により事前確率を更新する。そのため、迷惑メールの判断の根拠となる検索語を３語から４語に増やす、あるいは検索語に関わるデータを増やし表内の尤度の精度を高めれば、さらに迷惑メールの分類精度を高めることができる。したがって、「数学Ａ」の授業だけでなく、「情報Ⅱ」の授業で、教材２の活動をExcel等のICTを用いて実現することも想定できる。言い換えれば、問題場面を工夫することで、数学で扱った教材を再度情報の授業で扱う、あるいは数学の授業でICTを使い、情報科と連携して扱うことも想定できる。

以上を踏まえると、ベイズ推測の学習指導の意義として、次の示唆が得られる。

・ベイズ推測を授業で扱うことで、データサイエンスを志向した条件付き確率の学習指導が可能になり、情報科との連携につながる

Ⅴ．まとめと今後の課題

本稿では、データサイエンスを志向した条件付き確率の学習指導に向けて、学校数学における条件付き確率の位置づけについて整理し、ベイズ推測の利点を踏まえた２つの教材を例示した。そして、その教材で想定される生徒の解答例を分析し、前述した３つの示唆を得た。

今後の課題は、本教材を授業実践を通して検証すること、及び「情報Ⅱ」内容を踏まえたベイズ推測教材を開発し、情報科の立場から数学科との連携を検討することの２つである。

付記

本稿は、第16回統計教育の方法論ワークショップ（実践女子大学，2019年３月）の発表内容に大幅に加筆・修正を加えたものである。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 JP19K14249 の助成を受けている。

注・文献

1）新村出編（2018）:「広辞苑第七版」，岩波書店，1989.
2）竹村彰通（2018）:「データサイエンス入門」，岩波書店.
3）Takemura,A. （2018）: A new era of statistics and data science education in Japanese universities, Japanese Journal of Statistics and Data Science,1, 109-116.
4）データサイエンティスト協会(2014）:「データサイエンティスト協会，データサイエンティストのミッション，スキルセット，定義，スキルレベルを発表（2014年12月10日報道資料)」，1-7. https://prtimes.jp/main/html/rd/p/000000005.000007312.html
5）内閣府（2018）:「Society5.0」https://www8.cao.go.jp/cstp/society5_0/index.html
6）文部科学省（2018）: Society5.0 に向けた人材育成～社会が変わる，学びが変わる. http://www.mext.go.jp/a_menu/society/index.htm
7）文部科学省（2019）:「高等学校学習指導要領解説数学編理数編」，学校図書.
8）文部科学省（2019）:「高等学校学習指導要領解説情報編」，開隆堂出版.
9）Kahneman,D. （2014）:「ファスト＆スロー［上］（村井章子訳)」，早川書房.
10）Fishbein,E,& Schnarch,D :（1997）The evolusion with age of probabilistic intuitivety based miscoseptions, Journal for Research in Mathematics Education,28,97-105.
11）山本忠（1994）:「同型的図式表現と視点の移動による条件付き確率の理解の改善」，日本数学教育学会　第27回数学教育論文発表会論文集，389-394.
12）国立政策研究所（2014）:「学習指導要領データベース」，https://www.nier.go.jp/guideline/
13）渡部洋（1999）:「ベイズ統計学入門」，福村出版，1-87.
14）図３のＢについて、P(B)は事前確率、PA(B)は事後確率を示している。このとき、PB(A)を尤度といい、Ｂの下で起こる「尤もらしさ」を表す。
15）例えば、オ）について母分散を既知として、お菓子工場で生産されるお菓子の重さを区間推定する場合、標本理論では信頼度95％の信頼区間が求まるが、ベイズ推測では事後の確率分布を直接求めることができるため、確率95％の区間が求まる。
16）ベイズ推測では、事前分布へアプローチの１つとして「根底にある分布について何も分からないのであれば，無差別の原理は，すべてのとり得る値は等しい確率で起こるように決めるべきである」（Graham &Ian（2010）365）と主張される。この原理を理由不十分の原理という。
Graham,U.&Ian,C. （2010）:「統計学辞典（白旗慎吾監)」，共立出版.
17）涌井貞美（2013）:「図解・ベイズ統計「超」入門」，SB クリエイティブ.
18）ベイズ統計では、任意の事前分布 $p(\theta)>0$ に対して、標本サイズ n が大きくなると事後分布 $p(\theta \mid x_1,\cdots,x_n)$ は母数の真の値に集中するという主張がある。これを「精密測定の原理」という（美添，2010，164)。
美添泰人（2010）:「経済と統計の間で」，日本統計学会誌，38(2),161-179.
19）高橋陽一郎他29名（2016）:「詳説数学Ａ改訂版」，啓林館，59-68.
20）美添（2010）では、ベイズ統計の実用性を認めつつ、事前分布の設定の仕方により観測値が事後分布に反映されないことを指摘している（164)。そのため、実際に分析を進める際には、教材２でも事前確率の設定の仕方に留意する。
（上記 URL はすべて 2019.8.27 現在）